45 Soient u et v les suites définies pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4v_n}{7} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3v_n}{7} \end{cases}$$

1) Calculer u_0, u_1, v_1, v_2.

2) Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = u_n + v_n$.
Démontrer que (w_n) est constante.

49 [Calculer.]

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ pour tout $n \geqslant 0$.

2. $u_n = \dfrac{3^n}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

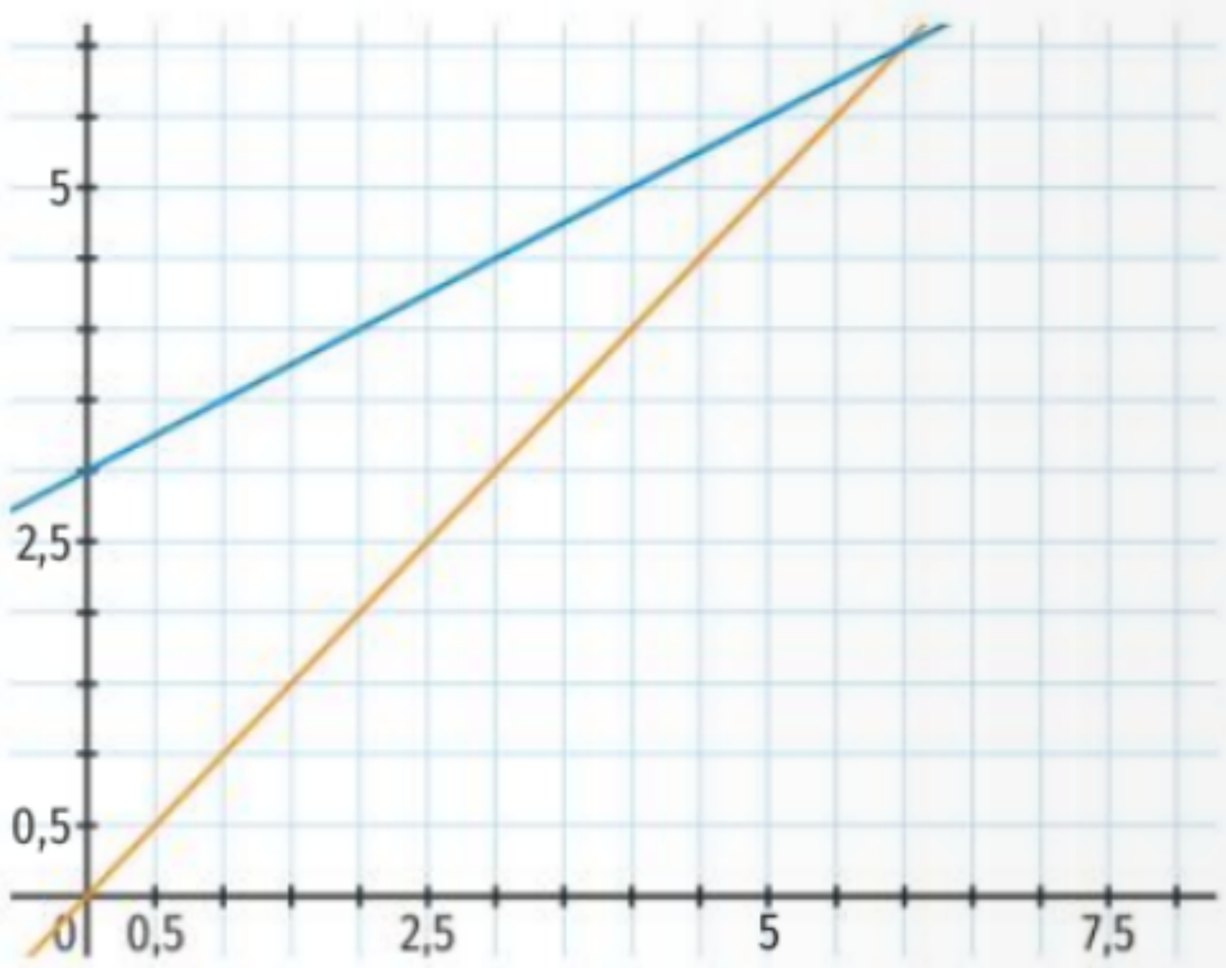
3. $u_n = n^2 - 3n + 12$ pour tout $n \geqslant 0$.

4. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

50 [Représenter.]

Dans un repère orthonormé, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}5x + 3$ et la droite d'équation $y = x$.

On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$



1. Reproduire la figure et représenter les cinq premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

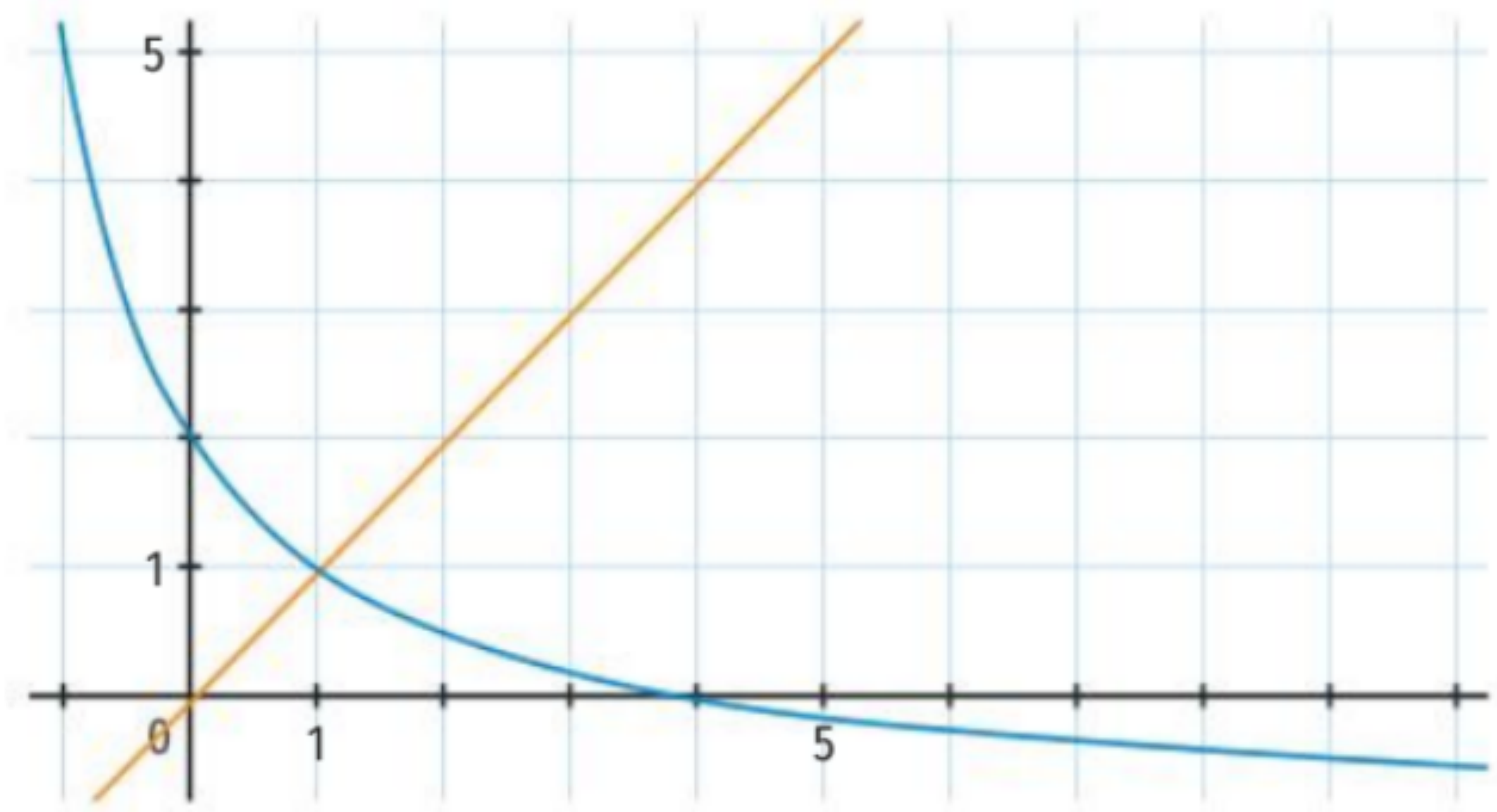
2. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3. Conjecturer la limite de la suite.

51 [Représenter.]

Dans un repère orthonormé, on a représenté la fonction f définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6}{x+2} - 1$ et la droite d'équation $y = x$.

On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$



1. Reproduire et représenter les cinq premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

2. Émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite, puis sur sa limite.

53 [Calculer.]

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 + \dfrac{3}{2n+1}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. Déterminer le sens de variation de (u_n).

3. Déterminer par le calcul le plus petit entier n_0 tel que $|u_{n_0} - 5| \leqslant 0{,}001$.

4. Conjecturer la limite de la suite.

5. Question facultative :

a. Écrire un algorithme permettant de trouver le rang n_0 à partir duquel $|u_{n_0} - 5| \leqslant \varepsilon$ pour ε donné par l'utilisateur.

b. Programmer l'algorithme et le tester pour $\varepsilon = 0{,}001$, $\varepsilon = 10^{-5}$ puis $\varepsilon = 10^{-6}$.