4 Déterminer une fonction dérivée

Cours 3 p. 120

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer sur quel ensemble elle est dérivable puis déterminer sa dérivée .

a) $f : x \mapsto 9x^4$ **définie sur** $\mathbb{R}$

b) $h : x \mapsto \frac{3}{4}x - 7$ **définie sur** $\mathbb{R}$

c) $i : x \mapsto \sqrt{x}(3x - 1)$ **définie sur** $[0 ; +\infty[$

d) $j : x \mapsto \frac{x^3}{1-x}$ **définie sur** $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

Solution

a) f est de la forme ku 1 avec $k = 9$ et $u(x) = x^4$ 2 Or u est une fonction de la forme x^n (avec $n = 4$) dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel x, on a $u'(x) = 4 \times x^{4-1} = 4x^3$Ainsi, pour tout réel x, $f'(x) = k \times u'(x) = 9 \times 4x^3 = 36x^3$.

b) La fonction h est de la forme $u + v$ 1 avec $u(x) = \frac{3}{4}x$ et $v(x) = -7$.

Or $u(x)$ est elle-même de la forme $k \times U(x)$ avec $k = \frac{3}{4}$ et

$U(x) = x$; la fonction U est la fonction identité 2, elle est donc

dérivable sur $\mathbb{R}$,

et $U'(x) = 1$, donc $u'(x) = k \times u'(x) = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$.

D'autre part v est une fonction constante, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et $v'(x) = 0$. Donc la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $h'(x) = u'(x) + v'(x) = \frac{3}{4} + 0$. Soit $h'(x) = \frac{3}{4}$.

On peut aussi dire que h étant une fonction affine de de la forme $mx + p$ avec $m = \frac{3}{4}$, alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $h'(x) = \frac{3}{4}$.

c) i est de la forme uv 1 avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 3x - 1$. 2 Or u est la fonction racine carrée dérivable sur $I =]0 ; +\infty[$ et v est une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier elle est dérivable sur $I =]0 ; +\infty[$). Ainsi i est dérivable sur I d'après le théorème de la dérivée d'un produit.

De plus, pour tout réel x de I, $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'(x) = 3$. Donc, pour tout réel x de I, on a

$$i'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (3x - 1) + 3\sqrt{x} = \frac{3x - 1}{2\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}.$$

On peut réduire cette dernière expression en mettant au même dénominateur :

$$i'(x) = \frac{3x - 1}{2\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 1}{2\sqrt{x}} + \frac{6(\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 1}{2\sqrt{x}} + \frac{6x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 1 + 6x}{2\sqrt{x}} = \frac{9x - 1}{2\sqrt{x}}.$$

d) j est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3$ et $v(x) = 1 - x$. Pour tout réel $x \neq 1$, $v(x) \neq 0$.

Or, d'après les théorèmes de dérivation des fonctions usuelles, u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc aussi sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$), et v est une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc aussi sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$). Ainsi, d'après le théorème de la dérivée d'un quotient, j est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

D'autre part $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = -1$. Donc on a, pour tout réel $x \neq 1$,

$$j'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x) \times u(x)}{v^2(x)} = \frac{3x^2(1 - x) - (-1) \times x^3}{(1 - x)^2} = \frac{3x^2 - 3x^3 + x^3}{(1 - x)^2} = \frac{3x^2 - 2x^3}{(1 - x)^2}$$

Conseils & Méthodes

1 Avant d'appliquer les théorèmes de dérivée des fonctions usuelles, il faut analyser la forme générale de la fonction (ku ; $u + v$; uv ; $\frac{1}{v}$; $\frac{u}{v}$), afin de déterminer le théorème d'opérations sur les dérivées (somme, produit, quotient...) qu'il va falloir utiliser.

2 Pour trouver l'ensemble sur lequel la fonction est dérivable il faut connaître l'ensemble de dérivabilité de la (ou des) fonction(s) de référence u (et v) identifiées précédemment dans la fonction et vérifier les conditions d'application du théorème de dérivation utilisé.