

exercice n°1

$$1. \quad 5 + 10 + \dots + 1000 = 5 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 200) = 5 \times \frac{200 \times 201}{2} \\ = 100500$$

$$2. \quad 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^9 = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right) = \frac{349525}{262144}$$

ex 2

1. Formule du cours
$$U_n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = -1 + 2^{n+1}$$

2. Lorsque n est grand, U_n est aussi un grand nombre
on dit que la limite est $+\infty$ (lire "plus l'infini")

on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

ex 3

1. Formule du cours
$$V_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

2. Lorsque n est un grand nombre, V_n se rapproche de 1,5 $\left(\frac{3}{2}\right)$

on dit que la limite est 1,5

on note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1,5$$

ex 4

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \quad (*) \end{cases}$$

1. $u_2 = \frac{1+1}{2 \times 1} u_1$ En remplaçant n par 1 dans la formule (*)

$$u_2 = \frac{1}{2}$$

$u_3 = \frac{2+1}{2 \times 2} u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ En remplaçant n par 2 dans la formule (*)

2. $u_n = \frac{u_n}{n}$

3. $u_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$ $u_2 = \frac{u_2}{2} = \frac{1}{4}$ $u_3 = \frac{u_3}{3} = \frac{\frac{3}{8}}{3} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$

4. (u_n) semble géométrique de raison $\frac{1}{2}$

En appliquant la méthode vue en cours pour démontrer qu'elle EST géométrique

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{\frac{n+1}{2n} \times u_n}{n+1} \\ &= \frac{n+1}{2n} \times u_n \times \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n} \times u_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1/2 \times u_n &= \frac{1}{2} \times \frac{u_n}{n} \\ &= \frac{u_n}{2n} \\ &= \frac{1}{2n} \times u_n \end{aligned}$$

Donc pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$ donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $u_1 = \frac{1}{2}$

5. D'après le cours, $u_m = u_1 \times q^{m-1}$

c'est à dire $u_m = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^m$

6. Comme $u_m = \frac{u_m}{n}$ on a $u_m = n \times u_m$

Donc $u_m = n \times \left(\frac{1}{2}\right)^m = n \times \frac{1}{2^m} = \frac{n}{2^m}$

Vérification : $u_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$ (voir question 1)
