Exercice n° 1

Un directeur de cirque accueille généralement 250 spectateurs à son spectacle, pour lequel les places sont vendues 22 €. La conclusion d'une étude statistique lui informe que pour chaque euro d'augmentation sur le prix du billet, il perdra en moyenne 14,5 spectateurs (et pour chaque euro en moins sur le prix du billet, il gagnera en moyenne 14,5 spectateurs).

A quel tarif doit-il vendre les places pour réaliser une recette maximale ?
(on donnera un prix au centime d'euro près, et la recette correspondante.)

Eléments de résolution
On pose x l'augmentation (positive ou négative, pour une baisse) en euros du prix du billet et $\mathcal{R}(x)$ la recette pour une augmentation de x euros.
Ainsi : $\mathcal{R}(x) = (22 + x)(250 - 14,5x)$

Je développe et ordonne :
$\mathcal{R}(x) = 5500 + 250x - 319x - 14,5x^2$
$\mathcal{R}(x) = -14,5x^2 - 69x + 5500$

La fonction $\mathcal{R}$ est un polynôme du second degré.
Comme le coefficient a est négatif, la parabole représentant $\mathcal{R}$ est ouverte vers le bas et on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-69}{29}$	$+\infty$
Variations de $\mathcal{R}$	$\nearrow$	$\mathcal{R}(\alpha)$	$\searrow$

La fonction $\mathcal{R}$ admet un maximum en $\alpha = -\frac{-b}{2a} = \frac{69}{-29} \approx -2,38$.
Ce maximum est $\beta = \mathcal{R}(\alpha) = \mathcal{R}\left(\frac{-69}{29}\right) = \left(22 - \frac{69}{29}\right)\left(250 - 14,5 \times \frac{-69}{29}\right) \approx 5582,09$
Conclusion : D'après ce modèle, pour obtenir la recette maximale, le directeur doit baisser le prix de la place de 2,38 €.
Il doit vendre les places à 19,62 €et obtiendra une recette de 5582,09 €environ.

Exercice n° 2 Travail de recherche

1. Effectuer le calcul (il y a 19 divisons) et donner la valeur exacte du résultat :

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}}}}}}}}}}}}}}}} =$$

1ère division $\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

2ème division $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$

3eme division $\dfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{3}}=\dfrac{1}{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{3}{5}$

4eme division $\dfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}}}=\dfrac{1}{\dfrac{5+3}{5}}=\dfrac{5}{8}$

A chaque division, on réitère les même étapes de calcul :

a. On calcule la somme $1+\dfrac{a}{b}$, où $\dfrac{a}{b}$ est le résultat de la division précédente. On obtient $\dfrac{a+b}{b}$.

b. On inverse et on obtient $\dfrac{b}{a+b}$

Nous pouvons automatiser le calcul avec un logiciel (tableur ou programme de calcul) en faisant calculer pour chacune des 19 divisions, le numérateur et le dénominateur du résultat.

Le résultat de la 19ème division est $\dfrac{6765}{10946}$. Reste à ajouter 1 et le résultat final est le rationnel : $\dfrac{17711}{10946}$

2. Donner la valeur exacte avec 50 divisions.

Il suffit de modifier le programme, en effectuant 50 divisions au lieu de 19.

Le résultat de la 50ème division est $\dfrac{53316291173}{32951289900}$.