Exercice n° 1

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2}{2u_n}$ et $u_0 = 1$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. (On donnera le résultat sous la forme d'une fraction ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-8} près)

2. Que constate t-on ?

3. A l'aide d'un tableur ou d'un algorithme (pyhton) donné une valeur approchée des 10 premier termes de la suite.

4. En utilisant la suite u et l'aide ci-dessous, on souhaite approcher $\sqrt{2}$:

$\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388503875343276$

a. Comparer le nombre de décimales exactes obtenues avec u_3.

b. Comparer le nombre de décimales exactes obtenues avec u_4.

c. Comparer le nombre de décimales exactes obtenues avec u_5.

d. Conjecturer le nombre décimale exactes qui l'on aurait avec u_6, u_7, u_8

e. Conjecturer le plus petit indice qui me permettrai d'avoir les 100 premières décimales de $\sqrt{2}$.

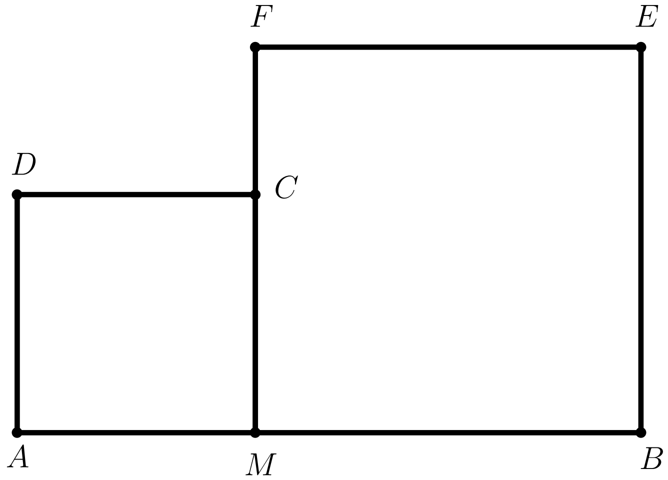
BONUS SUR 20 POINTS :
Sans utiliser d'ordinateur ni de calculatrice et en détaillant les calculs, montrer que :

$$u_5 = \frac{886731088897}{627013566048}$$

Exercice n° 2

1. [*Echauffement*] Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ on note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative.
Quelle est l'abscisse du sommet de $\mathcal{P}$?

2. Sur un segment $[AB]$ de longueur 10, on place un point M. On construit deux carrés $AMCD$ et $MBEF$ et on pose $x = AM$.



a. Déterminer la position du point M pour que la somme des aires des deux carrés soit minimale.

b. Obtient-on le même résultat en calculant le minimum de la somme des aires de deux disques de diamètres respectifs $[AM]$ et $[MB]$?

c. On considère maintenant un disque de diamètre [AM] et un carré [MB]. Démontrer que la somme des aires du carré et du disque est minimale lorsque le **rayon** du disque est égal à $\dfrac{20}{\pi + 4}$.