Exercice nº 1

Partie A

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un univers Ω prenant les valeurs x_1, x_2 et x_3 avec pour probabilités respectives p_1, p_2 et p_3

1. Écrire la formule de $Var(X)$. *(formule 1)*

2. Après avoir développer $Var(X)$, montrer que :

$$Var(X) = x_1^2\times p_1+x_2^2\times p_2+x_3^2\times p_3+E(X)^2\times(p_1+p_2+p_3)-2E(X)\times(x_1\times p_1+x_2\times p_2+x_3\times p_3)$$

3. En déduire que

$$Var(X) = x_1^2 \times p_1 + x_2^2 \times p_2 + x_3^2 \times p_3 - E(X) \qquad \textit{(formule 2)}$$

Partie B

On donne dans le tableau ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-2	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

1. Calculer $Var(X)$ avec la *(formule 1)* puis la *(formule 2)*.

2. Quelle formule vous semble plus pratique d'utilisation ?

Exercice nº 2 Etude d'une famille de courbes

Soit m un nombre appartenant à l'intervalle $[-4; 6]$. $\mathcal{C}_m$ est la courbe représentative de la fonction polynôme P_m définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P_m(x) = x^3 - mx^2 + mx - 1$$

Partie A : Conjecturer avec GeoGebra [1]

1. Construction

1. En cas de problème d'installation , vous pouvez utilisez une version de GeoGebra en ligne

a. Créer un curseur m. (min : - 4 , max : 6 et incrémentation : 0,2).

b. Dans la ligne saisie, taper l'expression de $P_m(x)$.

c. Varier le curseur m afin d'observer la famille des P_m.

2. Conjecture

a. Toutes les courbes semblent avoir deux points en commun. Donner les coordonnées de ces points.

b. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $P_m(x) = 0$ suivant les valeurs de m ?

c. On sait que 1 et 3 sont solutions de $P_m(x) = 0$, conjecturer la valeur de la troisième racine.

Partie B : Démonstration

1. Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$. On les notera A et B.

2. Par des calculs d'images, vérifiez que les points A et B appartiennent à $\mathcal{C}_m$ (pour tout nombre m).

3. a. Vérifiez que pour tout x réel et pour tout réel m,

$$x^3 - mx^2 + mx - 1 = (x-1)(x^2 + (1-m)x + 1)$$

b. Déduisez-en, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $P_m(x) = 0$.

4. Proposez une démonstration concernant votre conjecture donnée à la question **A-2-c**.

Exercice n° 3 BONUS :

Soient $m \in \mathbb{R}$, on définie la famille de fonctions P_m par $P_m(x) = (m-1)x^2 - 4mx + m - 6$. On note $\mathcal{P}_m$ la courbe représentative de P_m.

Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{P}_m$ ont deux points en commun.