

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 5}{2u_n}. \quad u_3 = \frac{2207}{987}$$

## 1 Calcul de $u_4$ à la main.

$$u_4 = \frac{\left(\frac{2207}{987}\right)^2 + 5}{2 \times \left(\frac{2207}{987}\right)} = \frac{2207^2 + 5 \times 987^2}{987^2} \times \frac{987}{4414} = \frac{2207^2 + 5 \times 987^2}{987} \times \frac{1}{4414}$$

**Numérateur :**

$\begin{array}{r} 2207 \\ \times 2207 \\ \hline 15449 \\ 4414 \cdot \cdot \\ 4414 \cdot \cdot \cdot \\ \hline 4870849 \end{array}$	$\begin{array}{r} 987 \\ \times 987 \\ \hline 6909 \\ 7896 \cdot \\ 8883 \cdot \cdot \\ \hline 974169 \end{array}$	$\begin{array}{r} 974169 \\ \times \quad 5 \\ \hline 4870845 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4870845 \\ + 4870849 \\ \hline 9741694 \end{array}$
--	--	---	---

**Dénominateur :**

$$\begin{array}{r} 4414 \\ \times 987 \\ \hline 30898 \\ 35312 \cdot \\ 39726 \cdot \cdot \\ \hline 4356618 \end{array}$$

On peut simplifier par 2 :

$\begin{array}{r l} 9741694 & 2 \\ 17 & 4870847 \\ 14 & \\ 016 & \\ 009 & \\ 014 & \\ 0 & \end{array}$	$\begin{array}{r l} 4356618 & 2 \\ 03 & 2178309 \\ 15 & \\ 16 & \\ 06 & \\ 018 & \\ 0 & \end{array}$
--	--

Donc  $u_4 = \frac{4870847}{2178309}$

## 2 Calcul de $u_5$ à la main.

$$u_5 = \frac{\left(\frac{4870847}{2178309}\right)^2 + 5}{2 \times \left(\frac{4870847}{2178309}\right)} = \frac{4870847^2 + 5 \times 2178309^2}{2178309^2} \times \frac{2178309}{2 \times 4870847} = \frac{4870847^2 + 5 \times 2178309^2}{2178309} \times \frac{1}{2 \times 4870847}$$

**Numérateur :**

$\begin{array}{r} 4870847 \\ \times 4870847 \\ \hline 34095929 \\ 19483388 \cdot \\ 38966776 \cdot \cdot \\ 34095929 \cdot \cdot \cdot \\ 38966776 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 19483388 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline 23725150497409 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2178309 \\ \times 2178309 \\ \hline 19604781 \\ 6534927 \cdot \cdot \\ 17426472 \cdot \cdot \cdot \\ 15248163 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 2178309 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 4356618 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline 4745030099481 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4745030099481 \\ \times \phantom{000000000000} 5 \\ \hline 23725150497405 \end{array}$
--	--	--

$$\begin{array}{r} 23725150497409 \\ + 23725150497405 \\ \hline 47450300994814 \end{array}$$

**Dénominateur :**

$$\begin{array}{r} 2178309 \\ \times 4870847 \\ \hline 15248163 \\ 8713236 \cdot \\ 17426472 \cdot \cdot \\ 15248163 \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 17426472 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 8713236 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \hline 10610209857723 \end{array}$$

On peut simplifier par 2 :

$\begin{array}{r} 47450300994814 \\ 07 \\ 14 \\ 05 \\ 10 \\ 03 \\ 10 \\ 009 \\ 019 \\ 014 \\ 008 \\ 014 \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 23725150497407 \end{array}$
---	---

$$u_4 = \frac{4870847}{2178309} \approx 2.2360679774999781940945935586$$

$$u_5 = \frac{23725150497407}{10610209857723} \approx 2.2360679774997896964091736767$$

$$\sqrt{5} \approx 2.2360679774997896964091736687$$

**Remarque :**  $u_4$  a une précision de 12 chiffres après la virgule et  $u_5$  a une précision de 25 chiffres après la virgule. Cette méthode dite de "Newton" permet à chaque étape de calcul de doubler le nombre de décimales exactes, ainsi  $u_6$  aura une précision de 50 chiffres après la virgule.