Exercice nº 1

Soit f définie sur $]0;+\infty[$, par

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

1. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x + \dfrac{4}{x} \geqslant 4$.

Exercice nº 2

Soit f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^3 + 3x + 18$$

1. Étudier les variations de f.
2. Démontrer que f est positive sur $]-\infty;1]$.
3. Vérifier que f s'annule en 3.
4. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[1;+\infty[$.

Exercice nº 3

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x^3 - x + 2$$

1. Étudier le sens de variation de f.
2. Calculer $f(1)$, puis en utilisant 1. déterminer le signe de $f(x)$.

Exercice nº 4

1. Construire le tableau de variation de la fonction f définie sur $]-2;+\infty[$ par :
$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{x+2}$$
2. En déduire un encadrement de f sur $[0;1]$.

Exercice nº 5

Étudier les variations de la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x+2}$.
En déduire pour tout x de $[-1;1]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

Exercice nº 6

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O}; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm sur (Ox) et 1 cm sur (Oy).

Partie A – Étude d'une fonction polynôme de degré 2

On note C_f la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3,4]$ par $f(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 1$.

1. Étudier les variations de f sur $[-3;4]$ et donner un encadrement de $f(x)$ sur $[-3;4]$.
2. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -1.
3. Tracer la tangente T puis la courbe C_f dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

B – Étude d'une fonction polynôme de degré 3

On considère C_g, la courbe représentative de la fonction g définie sur $[-3,4]$ par $g(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 1$.

1. Calculer $g'(x)$ et expliquer pourquoi $g'(x)$ est du signe de $x^2 - x - 2$.
2. Étudier les variations de g sur $[-3,4]$ et donner un encadrement de $g(x)$ sur $[-3;4]$.
3. Combien l'équation $g(x) = 0$ admet-elle de solution(s) sur $[-3,4]$?
4. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} des solutions.
5. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des courbes C_f et C_g.
6. Déterminer les positions relatives des courbes C_f et C_g.
7. Tracer la courbe C_g dans le repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice nº 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1+x)^3$$

et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
2. On pose $u(x) = f(x) - (3x+1)$.
   - **a.** Etudier les variations de u sur $\mathbb{R}$.
   - **b.** Vérifier que u s'annule en -3.
   - **c.** Déterminer le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente T.
   - **b.** Construire la courbe $\mathcal{C}$ et cette tangente T.