Exercice n° 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$$
On appelle $\mathcal{C}_f$ une courbe représentative de f dans le repère orthonormé ci-dessous.

Partie A : Echauffement

1. Justifier que le dénominateur est toujours positif.

2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{3(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

3. En déduire le tableau de variations de $f(x)$.

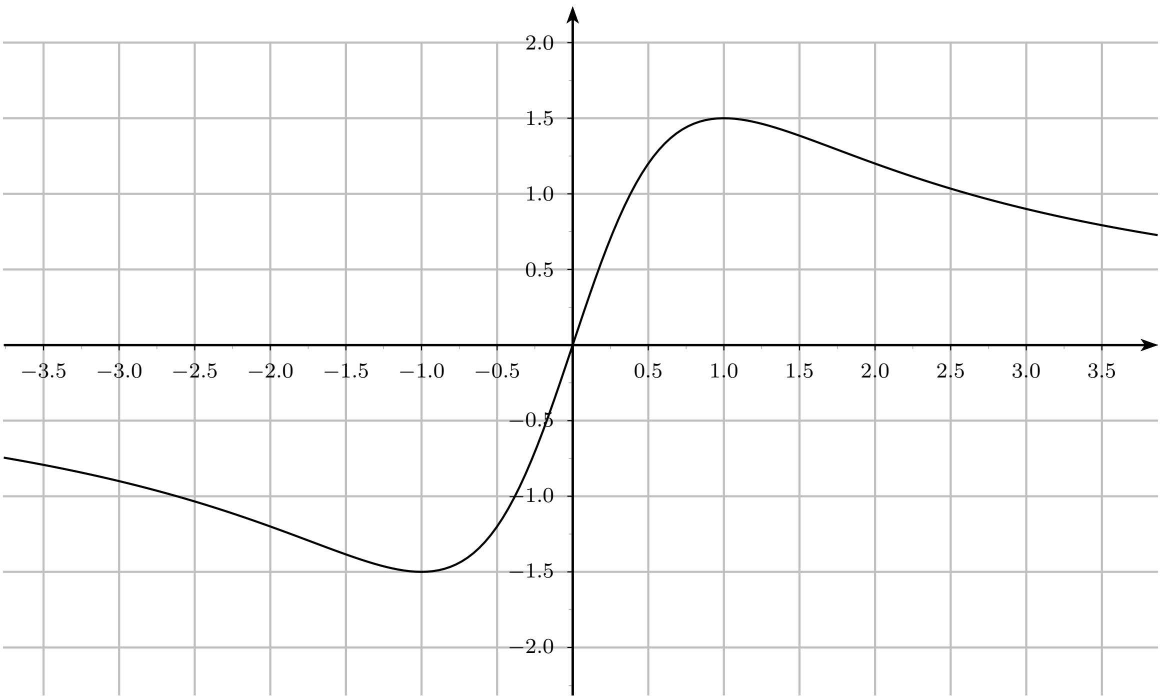
Partie B : Tangentes parallèles

1. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.

2. Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -3.

3. Justifier que ces tangentes sont parallèles.

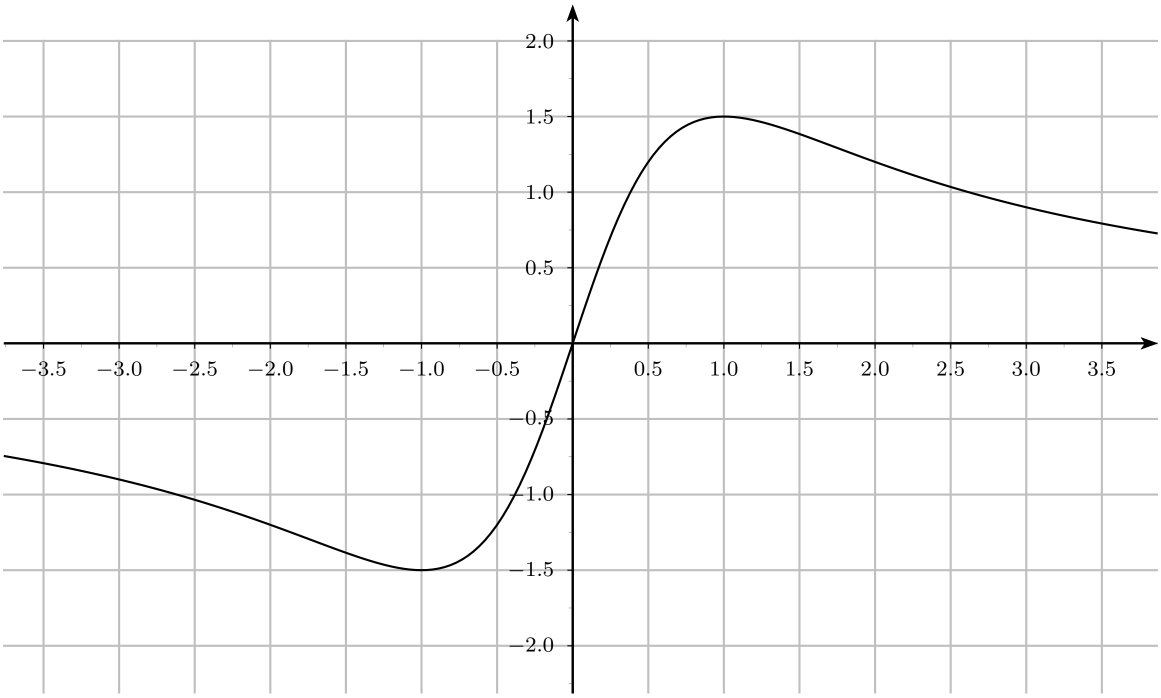
4. Tracer ces tangentes sur le graphique ci-dessous.



Partie C : Tangentes perpendiculaires

1. Montrer $y = 3x$ est une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

2. Tracer cette tangente sur le graphique ci-dessous.



3. A l'aide du fichier GeoGebra (lien), conjecturer le nombre de tangente à la courbe C_f qui sont perpendiculaires à la droite d'équation $y = 3x$ puis **LES** reproduire sur le graphique.

Aide : Faire varier les curseurs. Le curseur c désigne l'abscisse du point C. Le curseur b désigne l'abscisse du point B.

Dans la suite, on souhaite confirmer ou infirmer la conjecture. Pour cela on aura besoin de la propriété suivante :
Propriété : Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficient directeur est égal à -1.
Par exemple : Les droites d'équation $y = 2x + 1$ et $y = -0.5x + 3$ sont perpendiculaires (car $2 \times (-0.5) = -1$)

4. Soit a un nombre réel. Justifier que la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 3x$ si, et seulement si

$$\frac{9(1-a^2)}{(a^2+1)^2} = -1 \qquad \text{On apelle } \mathcal{E} \text{ cette équation d'inconnue } a$$

5. Montrer que l'équation $\mathcal{E}$ est équivalente à l'équation :

$$a^4 - 7a^2 + 10 = 0$$

6. En posant $X = a^2$, l'équation s'écrit $X^2 - 7X + 10 = 0$. Trouver les deux solutions de l'équation :

$$X^2 - 7X + 10 = 0$$

7. En déduire les quatre valeurs possibles pour a.

8. Votre conjecture émise à la question 3) est-elle confirmée ou infirmée ?