2- Monotonie d'une suite

Définitions

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

1. Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
2. Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
3. Une suite est dite **monotone** à partir du rang n_0 lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante à partir du rang n_0.

LOGIQUE

$u_{n+1} \geqslant u_n$ est équivalent à $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Exemples :

1. $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2 \end{cases}$

$$a_{n+1} > a_n$$

Donc la suite (a_n) est strictement croissante à partir du rang 0.

2. $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_{n+1} = b_n - 3 \end{cases}$

$$b_{n+1} > b_n$$

Donc la suite (b_n) est strictement décroissante à partir du rang 0.

3. $\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{n+1} = 2c_n - 1 \end{cases}$

$$c_0 = 1$$
$$c_1 = 1$$
$$c_2 = 1$$

On constate que :

$$c_{n+1} = c_n$$

Cette suite semble* constante à partir du rang 0.

3- Méthode pour déterminer la monotonie d'une suite

a) Savoir écrire u_{n+1}

Exemple 1 :

$$\begin{array}{llllll} u_n & = & 3 & \times & n & -5 \\ u_{n+1} & = & 3 & \times & (n+1) & -5 = \end{array}$$

Exemple 2 :

$$\begin{array}{llllll} u_n & = & -2 & \times & n & +3 \\ u_{n+1} & = & -2 & \times & (n+1) & +3 = \end{array}$$

Exemple 3 :

$$u_n = \frac{-2n+1}{n+1} \qquad u_{n+1} = \frac{-2(n+1)+1}{(n+1)+1}$$

Exemple 4 :

$$u_n = 3n^2 - n \qquad u_{n+1} = 3(n+1)^2 - (n+1) = \text{on developpe...} = 3n^2 + 5n + 2$$

Exemple 5 :

$$u_n = 3^n \qquad u_{n+1} = 3^{(n+1)} = 3^n \times 3$$

Remarque utile pour la suite du cours :

$$3^5 = \underbrace{3\times 3\times 3\times 3}_{3^4}\times 3 = 3^4\times 3$$

$$3^{n+1} = \underbrace{3\times 3\times \ldots \times 3}_{3^n}\times 3 = 3^n\times 3$$

On peut donc écrire : $3^5 = 3^4\times 3$ on a $3^{n+1} = 3^n\times 3$

De même on a : $\dfrac{3^5}{3^4} = \dfrac{3^4\times 3}{3^4} = 3$ et $\dfrac{3^{n+1}}{3^n} = \dfrac{3^n\times 3}{3} = 3$

Exercice n° 1 C'est à vous...

Simplifier les expressions (comme dans la remarque ci-dessus) :

$$\frac{2^5}{2^4} = \ldots \quad \frac{2^{n+1}}{2} = \ldots \quad \frac{2^4}{2^5} = \ldots \quad \frac{2^{n+1}}{2^n} = \ldots$$

$$\frac{5^3}{5^4} = \ldots \quad \frac{5^{n+1}}{5} = \ldots \quad \frac{5^3}{5^2} = \ldots \quad \frac{5^{n+1}}{5^n} = \ldots$$

Exercice n° 2 C'est à vous...

1. $u_n = 5n^2 - 4n - 1$ $u_{n+1} = \ldots$

2. $u_n = 5^{n+1}$ $u_{n+1} = \ldots$

3. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ $u_{n+1} = \ldots$

4. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ $u_{n+1} = \ldots$

5. $u_n = \dfrac{n}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ $u_{n+1} = \ldots$

Correction page suivante ...

Correction exercice 1 :
Simplifier les expressions (comme dans la remarque ci-dessus) :

$$\frac{2^5}{2^4} = 2 \qquad \frac{2^{n+1}}{2} = 2^n \qquad \frac{2^4}{2^5} = \frac{1}{2} \qquad \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

$$\frac{5^3}{5^4} = \frac{1}{5} \qquad \frac{5^{n+1}}{5} = 5^n \qquad \frac{5^3}{5^2} = 5 \qquad \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5$$

Correction exercice 2 :

1. $u_n = 5n^2 - 4n - 1$ $\qquad u_{n+1} = 5(n+1)^2 - 4(n+1) - 1 = 5(n^2 + 2n + 1) - 4n - 4 - 1 = 5n^2 + 6n$

2. $u_n = 5^{n+1}$ $\qquad u_{n+1} = 5^{n+2}$ on peut aussi écrire $u_{n+1} = 5^n \times 5^2 = 5^n \times 25$

3. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad u_{n+1} = \dfrac{n+1}{(n+1)+1} = \dfrac{n+1}{n+2}$

4. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ $\qquad u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$

On va mettre au même dénominateur $(n+1)(n+2)$. Voici le détail :

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1 \times (n+2)}{(n+1)(n+2)} - \frac{1 \times (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

5. $u_n = \dfrac{n}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ $\qquad u_{n+1} = \dots$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) \times (n+1)}{n(n+1)} - \frac{1 \times n}{n(n+1)} = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}$$

Pour les auditifs, j'ai fait une vidéo qui explique les 2 derniers cas ci-dessus : lien

NE PASSER PAS A LA SUITE SI CES DEUX EXERCICES NE SONT PAS COMPRIS

b) Signe de la différence

Le cours ci-dessous est expliqué en video : lien

Pour déterminer la monotonie d'une suite (c'est à dire son sens de variation) on va étudier le signe de

$$u_{n+1} - u_n$$

— Si $u_{n+1} - u_n$ est strictement positif alors la suite est strictement croissante.

— Si $u_{n+1} - u_n$ est strictement négatif alors la suite est strictement décroissante.

— Si $u_{n+1} - u_n$ est égal à zéro alors la suite est constante.

Exemple 1 : Etudier la monotonie de $u_n = 6n - 8$

On calcule $u_{n+1} = 6(n+1) - 8 = 6n - 2$

On calcule la différence : $u_{n+1} - u_n = (6n-2) - (6n-8) = 6$

Le résultat est positif donc on peut dire que la suite est croissante à partir du rang 0.

Exemple 2 : Etudier la monotonie de $u_n = n^2 - 4n$

On calcule $u_{n+1} = (n+1)^2 - 4(n+1) = \ldots = n^2 - 2n - 3$

On calcule la différence : $u_{n+1} - u_n = n^2 - 2n - 3 - (n^2 - 4n) = n^2 - 2n - 3 - n^2 + 4n = 2n - 3$

Vous savez étudier le signe de $2n - 3$:

n	0		$1,5$		$+\infty$
$2n-3$		$-$	0	$+$	

A partir du rang 2, $u_{n+1} - u_n$ est strictement positif donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

Remarque : Calculer les 4 premiers termes de la suites u cela confirmera notre monotonie.