Chapitre 12 : Variables aléatoires réelles

I) Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition : Soit Ω l'ensemble des issues (l'univers) d'une expérience aléatoire. Une variable aléatoire réelle sur Ω est une fonction qui associe à chaque issue de Ω un nombre réel.

Notations : L'événement "X = a" est alors l'ensemble des issues de Ω qui ont pour résultat : a.
On peut également définir des événements du type "X > a" ou encore "X ≤ a".

Définition : Définir une **loi de probabilité** sur une variable aléatoire, c'est associer à chaque valeur possible de X la probabilité de l'événement concerné.

Exemple 1 : On joue trois fois de suite à "Pile ou Face" en pariant à chaque fois 1€ sur "Pile". On définit une variable aléatoire X prenant pour valeur le gain total après les trois parties.

Dessinez l'arbre des possibles de cette situation :

Donnez alors la loi de probabilité de X :

Valeurs x_i				
$P(X=x_i)$				

Exercice n° 1

Un jeu consiste à lancer trois fois une pièce de monnaie bien équilibré. Chaque pile obtenu rapporte 3 € et chaque face fait perdre 2 €.

1. Quels sont les gains (ou pertes) possibles ?

2. On note G le gain algébrique du joueur. Donner la loi de probabilité de G.

<u>Définition :</u> L'**espérance** de X est le nombre réel, noté E(X), tel que :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \ldots + x_n \times p_n$$

Remq : C'est une ***moyenne*** *lorsque l'expérience aléatoire est répété un grand nombre de fois.*

<u>Définition :</u> La variance de X est le nombre réel, noté V(X), tel que :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \times p_i = (x_1 - E(X))^2 \times p_1 + (x_2 - E(X))^2 \times p_2 + \ldots + (x_n - E(X))^2 \times p_n$$

L'écart-type de X est le nombre réel, noté σ(X), tel que : σ(X) =

<u>Remq :</u> C'est une moyenne quadratique des écarts des valeurs avec l'espérance.

<u>Exemple :</u> Calculer E(X) et σ(X) dans le cas suivant :

Valeurs x_i	4	6	9	15
$P(X=x_i)$	0,2	0,15	0,35	

E(X) =

σ(X) =

Exercice 2 :

Calculer E(x) et σ(X) de l'exercice 1

65 [Calculer.]

On donne dans le tableau ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-2	a	3
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	p

1. Déterminer la valeur de p.

2. Quelle valeur faut-il donner à a pour que $E(X) = 2$?

3. Calculer Var(X) et σ(X).

BILAN :

Une urne contient 150 jetons rouges et 50 jetons bleus, tous indiscernables au toucher. $20\ \%$ des jetons rouges sont gagnants et $40\ \%$ des jetons bleus sont gagnants. Un joueur tire au hasard un jeton de l'urne.

Question 1

La probabilité que le jeton soit rouge et gagnant est :

a) $0{,}2$	b) $0{,}45$	c) $0{,}15$	d) $0{,}95$

Question 2

La probabilité que le jeton soit gagnant est :

a) $0{,}2$	b) $0{,}6$	c) $0{,}25$	d) $0{,}4$

Question 3

Un joueur tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. La probabilité qu'il tire deux jetons rouges est :

a) $0{,}5625$	b) $0{,}75$	c) $0{,}30$	d) $0{,}15$

On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros d'un joueur. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

Valeurs a prises par X	-5	0	10
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=a)$	$0{,}6$	$0{,}15$	$0{,}25$

Question 4

La probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 0)$ est égale à :

a) $0{,}15$	b) $0{,}6$	c) 10	d) $0{,}25$

Question 5

Le gain algébrique moyen en euros que peut espérer un joueur est égale à :

a) 0	b) $-0{,}5$	c) $\frac{5}{3}$	d) 5