Exercice n° 1 Montrer qu'une suite est arithmétique

Soit u la suite la suite définie par $u_n = -1 + n$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. Montrer que la suite u est arithmétique et déterminer sa raison.

Exercice n° 2 Détermination d'une suite arithmétique à partir de deux de ses termes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique telle que $u_2 = 10$ et $u_{46} = 68,5$.
Déterminer le premier terme u_0 et la raison r.

Exercice n° 3 Application directe du cours

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par

$$u_0 = -5 \qquad et \qquad u_{n+1} = u_n + \frac{5}{2}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Préciser la nature et les caractéristiques de cette suite.

3. Exprimer u_n en fonction de n. Calculer u_{117}.

Exercice n° 4

Il existe de nombreux procédés de construction de spirales. En voici un exemple :

Au centre d'une feuille de format A4 quadrillée, tracez comme il est indiqué ci-dessous un carré $ABCD$ dont chaque côté a pour longueur 1 cm, puis :
- le quart de cercle DE centré en A
- le quart de cercle EF centré en B
- le quart de cercle FG centré en C

etc..., jusqu'à obtenir une dizaine de quart de cercles centrés respectivement en A, B, C, D, A, B, C, D, etc...

1. On note $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ les rayons successifs des quarts de cercle ainsi dessinés. On a $R_1 = 1$ avec l'unité choisie.
Calculer R_2, R_3, R_4.

2. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n.

3. Montrer que (R_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison. En déduire R_n en fonction de n.

4. On note L_n la longueur de la spirale comportant n quarts de cercle.

5. Calculer L_1, L_2, L_3.

6. Déterminer L_{100} puis L_n en fonction de n.

Exercice n° 5

Dans chacun des cas, dire si la suite est géométrique :

1. $u_n = 3 + 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $u_n = 5 \times 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. $u_n = 3^{n-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 7u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 6

Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \quad pour \quad n \in \mathbb{N}^* \\ u_0 = 1 \end{cases}$

1. La suite (u_n) est-elle géométrique ?

2. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 3$ pour $n \in \mathbb{N}$

- **a.** Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
- **b.** En déduire que $u_n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$.
- **c.** Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Exercice n° 7

Vous placez un capital C_0, au taux annuel de $4,5\%$. Chaque année, le capital augmente de $4,5\%$ de sa valeur. On note C_n le capital acquis au bout de n années. On pose $C_0 = 1000$ euros.

1. Calculez C_1 et C_2.

2. Exprimez C_{n+1} en fonction de C_n et donner les caractéristiques de la suite.

3. En déduire une expression de C_n en fonction de n.

4. Calculer votre capital au bout de 10 années

5. Dans combien d'années votre capital initial aura t-il doublé ?

Exercice n° 8

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier n par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{2}{3}$.
Soit (w_n) la suite définie pour tout entier n par $w_n = 3u_n - 4$.

1. Montrer que (w_n) est une suite géométrique.

2. Exprimer w_n en fonction de n puis en déduire une formule explicite pour la suite (u_n).

Exercice n° 9

Une suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{7} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - u_n}. \end{cases}$

(**On admettra** que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq 0$ et $u_n \neq 3$.)

1. Calculer u_2.

2. Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $w_n = \frac{1}{u_n}$.

- a) Calculer w_1 et w_2.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_{n+1} = 3w_n - 1$.

3. Soit $x_n = w_n - \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Calculer les trois premiers terme de (x_n).
- b) En déduire la nature de la suite (x_n) ?
- c) Exprimer x_n en fonction de n.

4. <u>En déduire</u> l'expression générale de u_n en fonction de n.