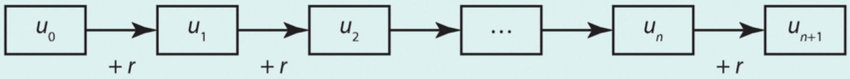
1 Suites arithmétiques

1.1 Définition (formule récurrente)

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = u_n + r$.



Exemple : $u_0 = 5, u_1 = 5,1, u_2 = 5,2, ...$ sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison ... et de premier terme ....

1.2 Applications

1. Soit (v_n) une suite arithmétique de raison -0.5 et de premier terme 10.
Écrire une formule récurrente pour (v_n) :

$$v_0 = \ldots\ldots v_{n+1} = \ldots\ldots$$

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 2$

$$u_1 = \ldots\ldots \quad u_2 = \ldots\ldots \quad u_3 = \ldots\ldots \quad u_4 = \ldots\ldots$$

3. Ecrire un algorithme en Python, afin d'afficher les 10 premiers termes de la suite (u_n)

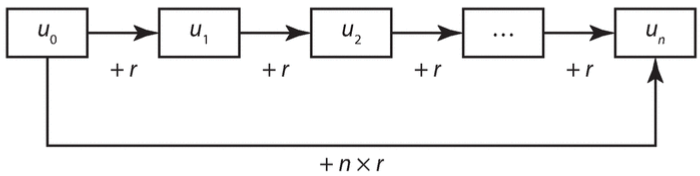
```
i=0
u=3
while ...
        ...
        ...
        ...
```

4. Trouver une **formule explicite** pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1.3 Formule explicite

Propriété **Expression du terme général**

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 + r \times (n-1)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p + r \times (n-p)$.



Exemples :

1. Soit (a_n) une suite arithmétique de raison $0,1$ et de premier terme $a_0 = 5$. Calculer a_{100}.

2. Soit (b_n) une suite arithmétique de raison -3 et de premier terme $b_0 = 150$. Calculer b_{47}.

3. Soit (c_n) une suite arithmétique de raison $0,5$ et de premier terme $c_1 = 10$. Calculer c_{30}.

1.4 Comment montrer qu'une suite est arithmétique ?

On peut calculer les 3 premiers termes pour conjecturer la raison r. On calcule $u_{n+1} - u_n$ Si le résultat est un nombre réel r indépendant de n alors la suite est arithmétique de raison r. (Elle ne l'est pas dans le cas contraire)

Exemples :

- Montrer que la suite $u_n = 3 + 2n$ est arithmétique.

  $u_{n+1} - u_n =$
  Donc ...

- Montrer que la suite $u_n = 1 + n^2$ n'est pas arithmétique.

1.5 Représentation graphique

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison -0.5 avec $v_0 = 3$.

formule récurrente :

formule explicite :

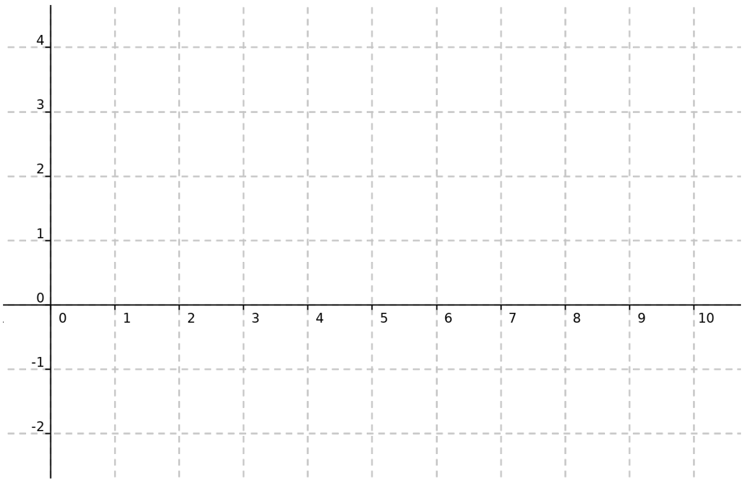
Placer les points de coordonnées $(0; v_0)$, $(1; v_1)$, $(2; v_2)$, $(3; v_3)$

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $1/3$ avec $t_0 = 1$.

formule récurrente :

formule explicite :

Placer les points de coordonnées $(0; t_0)$, $(1, t_1)$, $(3; t_3)$, $(6; t_6)$



Remarque : Pour les représentations graphiques des suites arithmétiques, on parle d'**évolution linéaire**.

1.6 Sens de variation d'une suite

Une suite arithmétique de raison r est :

- .... si r est ....
- .... si r est ....
- .... si r est ....

2 Suites géométriques

2.1 Définition (formule récurrente)

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = q \times u_n$.

$$\boxed{u_0} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_1} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_2} \longrightarrow \boxed{\dots} \longrightarrow \boxed{u_n} \xrightarrow{\times q} \boxed{u_{n+1}}$$

Exemple : $u_0 = 5, u_1 = 15, u_2 = 45, ...$ sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison ...et de premier terme ....

2.2 Applications

1. Soit (v_n) une suite géométrique de raison -2 et de premier terme 8.
Écrire une formule récurrente pour (v_n) :

$$v_0 = \dots\dots \quad v_{n+1} = \dots\dots$$

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 32$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$

$$u_1 = \dots\dots \qquad u_2 = \dots\dots \qquad u_3 = \dots\dots \qquad u_4 = \dots\dots$$

3. Ecrire un algorithme en Python, afin d'afficher les 10 premiers termes de la suite (u_n)

```
i=0
u=32
while ...
        ...
        ...
        ...
```

4. Trouver une formule explicite pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2.3 Formule explicite

Propriété **Expression du terme général**

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{u_0} \arrow[r, "\times q"'] \arrow[rrrr, bend right, "\times q^n"'] & \boxed{u_1} \arrow[r, "\times q"'] & \boxed{u_2} \arrow[r, "\times q"'] & \boxed{\dots} \arrow[r, "\times q"'] & \boxed{u_n}
\end{tikzcd}$$

Exemples :

1. Soit (a_n) une suite géométrique de raison $0,1$ et de premier terme $a_0 = 5$. Calculer a_{100}.

2. Soit (b_n) une suite géométrique de raison -3 et de premier terme $b_0 = 1$. Calculer b_7.

3. Soit (c_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $c_1 = 1024$. Calculer c_{12}.

2.4 Comment montrer qu'une suite est géométrique ?

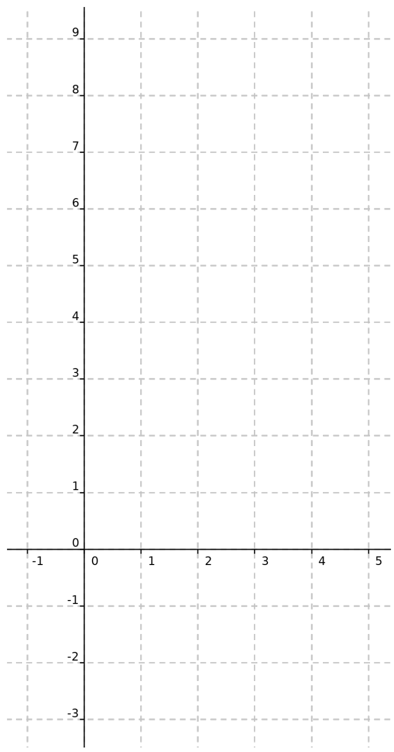
On calcule les 3 premiers termes pour conjecturer la raison q.
On calcule u_{n+1}
On calculer $q \times u_n$
Si $u_{n+1} = q \times u_n$ alors la suite est géométrique.

Exemples :

- Montrer que la suite $u_n = 6 \times 3^n$ est géométrique.

- Montrer que la suite $u_n = n^2$ n'est pas géométrique.

- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_n = b_n - 3$ où $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $b_0 = 2$ et $b_{n+1} = 2b_n - 3$
  Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.



2.5 Représentation graphique

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison 2 avec $v_0 = 0.5$.
formule récurrente :
formule explicite :
Placer les points de coordonnées $(0; v_0), (1; v_1), (2; v_2), (3; v_3)$
Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $1/3$ avec $t_0 = 9$.
formule récurrente :
formule explicite :
Placer les points de coordonnées $(0; t_0), (1, t_1), (2; t_2), (3; t_3)$

Remarque : Pour les représentations graphiques des suites géométriques, on parle d'**évolution exponentielle**.

2.6 Sens de variation d'une suite

Une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 > 0$ est :

- .... si q est ....
- .... si q est ....
- .... si q est ....
- .... si q est ....