5 Utiliser et reconnaître une suite arithmétique

Cours 2 p. 49

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison -2.

a) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

b) Déterminer la valeur de u_{25}.

2. Les suites ci-dessous sont-elles arithmétiques ?

a) $v_n = 3n - 2$ **b)** $w_n = n^2 + 1$ **c)** $a_n = \dfrac{n^2+n}{n}$

Solution

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + r \times n$. **1**
Donc ici, $u_n = 5 - 2n$

b) $u_{25} = 5 - 2 \times 25 = -45$ **2**

2. Pour chaque suite, on commence par calculer les premiers termes. **3**

a) $v_0 = 3 \times 0 - 2 = -2$
$v_1 = 3 \times 1 - 2 = 1$
$v_2 = 3 \times 2 - 2 = 4$
$v_1 - v_0 = 3$ et $v_2 - v_1 = 3$
La suite (v_n) semble arithmétique. Démontrons-le.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = [3(n+1) - 2] - (3n - 2)$
$= 3n + 3 - 2 - 3n + 2$
$= 3$
Donc la suite (v_n) est arithmétique de raison 3.

b) $w_0 = 0^2 + 1 = 1$
$w_1 = 1^2 + 1 = 2$
$w_2 = 2^2 + 1 = 5$
$w_1 - w_0 = 1$ et $w_2 - w_1 = 3$
Donc la suite (w_n) n'est pas arithmétique, car $w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$.

c) $a_1 = \dfrac{1^2+1}{1} = 2$; $a_2 = \dfrac{2^2+2}{2} = 3$; $a_3 = \dfrac{3^2+3}{3} = 4$ **4**

$a_2 - a_1 = 1$ et $a_3 - a_2 = 1$
$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$
Donc la suite (a_n) semble arithmétique. Démontrons-le.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{n^2+n}{n}$ **5**

$= \dfrac{n \times (n+1)}{n}$

Donc $a_n = n + 1$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = (n+1) + 1 - (n+1)$
$= n + 2 - n - 1$
$= 1$
Donc la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 1.

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n, on utilise les formules du cours.

2 Pour calculer u_{25}, on remplace n par 25 dans l'expression de u_n.

3 Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il faut montrer que $u_{n+1} - u_n$ est égale à une constante. Si on trouve un contre-exemple, la suite n'est pas arithmétique. Un exemple ne suffit pas à montrer que la suite est arithmétique.

4 a_n est défini pour $n \neq 0$, donc le premier terme de la suite (a_n) est a_1

5 Avant de calculer $a_{n+1} - a_n$, on peut essayer de simplifier l'expression de a_n.