6 Utiliser et reconnaître une suite géométrique

Cours 3 p. 50

1. **Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 telle que $u_2 = \frac{1}{4}$.**

a) Donner l'expression de u_n en fonction de n.

b) Déterminer la valeur de u_6.

2. **Les suites ci-dessous sont-elles géométriques ?**

a) $u_n = n^2 + 1$ **b)** $u_n = 2^{n+1}$ **c)** $u_n = \frac{1}{n}$

Solution

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_2 \times q^{n-2}$. **1**

Donc ici, $u_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-2}$.

b) $u_6 = \frac{1}{4} \times 2^{6-2} = \frac{1}{4} \times 2^4 = 4$ **2**

2. Pour chaque suite, on commence par calculer les premiers termes. **3**

a) $u_0 = 0^2 + 1 = 1$

$u_1 = 1^2 + 1 = 2$

$u_2 = 2^2 + 1 = 5$

$\frac{u_1}{u_0} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{2}$

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique, car $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

b) $u_0 = 2^{0+1} = 2$

$u_1 = 2^{1+1} = 4$

$u_2 = 2^{2+1} = 8$

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{2} = 2$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{8}{4} = 2$.

Donc la suite (u_n) semble géométrique de raison 2. Démontrons-le.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2^{n+1+1} \\ &= 2^{n+2} \\ &= 2 \times 2^{n+1} \\ &= 2 \times u_n \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 2.

c) $u_1 = \frac{1}{1} = 1$; $u_2 = \frac{1}{2}$; $u_3 = \frac{1}{3}$

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2}$ et $\frac{u_3}{u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$ donc $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Conseils & Méthodes

1 Pour déterminer l'expression de u_n en fonction de n, on utilise les formules du cours.

2 Pour calculer u_6, on remplace n par 6 dans l'expression de u_n.

3 Pour montrer qu'une suite est géométrique, il faut montrer que $u_{n+1} = q \times u_n$ avec q une constante ou que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égale à une constante (si les termes sont non nuls).
Si on trouve un contre-exemple, la suite n'est pas géométrique.
Un exemple ne suffit pas à montrer que la suite est géométrique.

4 $\frac{1}{n}$ est défini pour $n \neq 0$, donc le premier terme de la suite (u_n) est u_1.