Exercice n° 1

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 5$. Dans le repère ci-dessous, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f.

1. Donner l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

2. On pose $u_0 = 3$ et soit T_0 la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse u_0.

- **a.** Dans le repère ci-dessous, placer u_0 sur l'axe des abscisses.
- **b.** Déterminer une équation de T_0.
- **c.** T_0 coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse u_1.
- **d.** Montrer que $u_1 = \dfrac{7}{3}$.
- **e.** Dans le repère ci-dessous, construire T_0 puis placer u_1 sur l'axe des abscisses.

3. Soit T_1 la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse u_1.

- **a.** Déterminer une équation de T_1.
- **b.** T_1 coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse u_2. Placer approximativement u_2 sur l'axe des abscisses.
- **c.** Montrer que $u_2 = \dfrac{47}{21}$.

4. On réitère la construction, on définit ainsi une suite u_0, u_1, u_2, ...

- **a.** Construire T_3.
- **b.** Placer u_3.
- **c.** Montrer que $u_3 = \dfrac{2207}{987}$.

5. Déterminer une équation de la tangente T_n à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse u_n.

- **a.** Montrer que T_n a pour équation : $y = 2u_n \times x - (u_n)^2 - 5$
- **b.** En déduire que T_n coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 5}{2u_n}$.

6. A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs approchées des 5 premiers termes de la suite u et les comparer à $\sqrt{5}$.

7. BONUS (**20 points**) : Sans utiliser d ?ordinateur ni de calculatrice et en détaillant les calculs, montrer que :

$$u_5 = \frac{23725150497407}{10610209857723}$$

ANNEXE