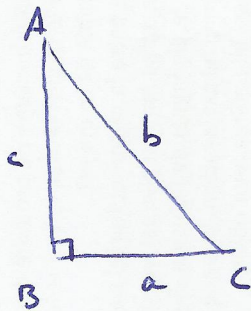


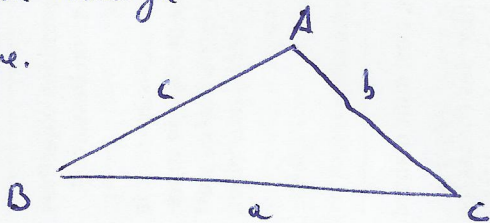
Chap. Produit scalaire

I INTRODUCTION



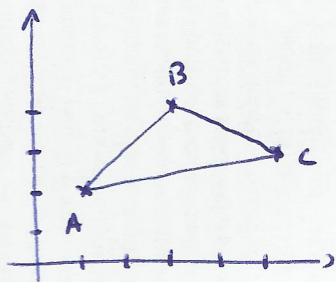
lien entre les longueurs a, b et c ?

ABC un triangle
quelconque.



lien entre a, b et c ?

Sur un exemple



$$A(1; 2)$$

$$B(3; 4)$$

$$C(5; 3)$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AB^2 = 8$$

$$BC^2 = 5$$

$$AC^2 = 17$$

$$17 \neq 8 + 5 \quad \text{il y a une "erreur" de 4 } (-17 - (8 + 5))$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 4$$

Cas général :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$

$$AB^2 = x^2 + y^2$$

$$BC^2 = x'^2 + y'^2$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= (x+x')^2 + (y+y')^2 \\ &= x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 \end{aligned}$$

Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2 + \underbrace{2(xx' + yy')}_{\text{"erreur"}} \quad \leftarrow \quad \begin{pmatrix} \downarrow & (*) \end{pmatrix}$

$$= \underbrace{x^2 + y^2}_{AB^2} + \underbrace{x'^2 + y'^2}_{BC^2} + 2xx' + 2yy'$$

Def : Dans un repère orthonormé, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ est le nombre réel :

$$\begin{array}{c} \vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y' \\ \uparrow \\ \text{scalaire} \end{array}$$

Remarque : Si $(AB) \perp (BC)$ (ABC est rectangle en B) alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Propriété :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

$\uparrow$
orthogonal

exemple 1 : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-4) + (-2) \times 1 = -12 - 2 = -14$$

exemple 2 : $A(1; 2)$ $B(5; 3)$
 $C(3; 1)$ $D(2; -3)$

1) (AB) et (CD) sont-elles $\perp$?

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 4 \times (-1) + 1 \times (-4) = -8 \neq 0$$

NON

2) (AD) et (BC) sont-elles $\perp$?

$$\vec{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{AD} \cdot \vec{BC} = -2 + (-5) \times (-2) = 8 \neq 0$$

NON

3) (AC) et (BD) sont-elles $\perp$?

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{BD} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 2 \times (-3) + (-1) \times (-6) = 0$$

OUI

Remarque :

D'après (*)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2(xx' + yy')$$

$$\Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow AC^2 - AB^2 - BC^2 = 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - BC^2) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

exercice Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

1) $AB = 3$

$AC = 4$

$BC = 6$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2} (16 - 9 - 36) \\ &= \underline{-14,5}\end{aligned}$$

2) $AB = AC = 5$

$BC = 2,5$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (5^2 - 5^2 - 2,5^2) = \underline{-6,25}$$

exercice Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

1) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \times 5 + (-2) \times (-1) = \underline{2}$$

2) $A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$B \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$

$C \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Exercice $A(2;0)$ $B(9;8)$ $C(10;1)$ - ABC est-il rectangle ?

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7 \times 8 + 8 \times 1 \neq 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 7 \times 1 + 8 \times (-7) \neq 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 8 \times 1 + 1 \times (-7) = 1 \neq 0$$

Donc ABC n'est pas un triangle rectangle.