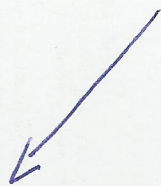


ABC triangle 9-9

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot \underbrace{\vec{AB} \cdot \vec{BC}}_{\text{product scalaire}}$$

product scalaire



$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - BC^2)$$



$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y'$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow (AB) \perp (BC)$$

II Propriétés du produit scalaire

Prop: Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ du plan et $k \in \mathbb{R}$

$$1) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$2) \vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$3) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Preuve

$$1) \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

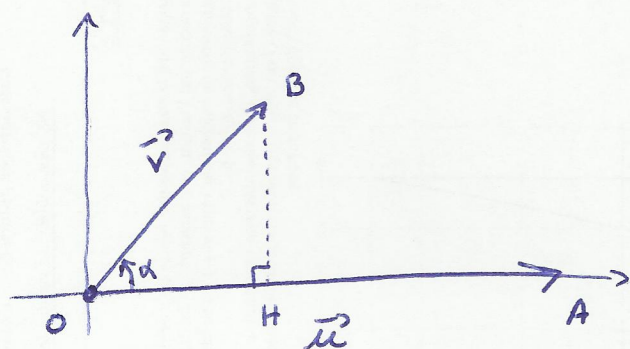
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix} = x \cdot (x' + x'') + y \cdot (y' + y'')$$

$$= xx' + xx'' + yy' + yy'' = \underbrace{xx' + yy'}_{\vec{u} \cdot \vec{v}} + \underbrace{xx'' + yy''}_{\vec{u} \cdot \vec{w}}$$

□

Remarque: $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = \quad = \|\vec{u}\|^2$

III Autres expressions du produit scalaire



Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot (\vec{OH} + \vec{HB}) = \vec{OA} \cdot \vec{OH} + \underbrace{\vec{OA} \cdot \vec{HB}}_0$$

Prop : $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \cdot OH$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA)

Avec les coordonnées

$$\vec{OA} \begin{pmatrix} OA \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OH} \begin{pmatrix} OH \\ 0 \end{pmatrix}$$

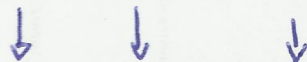
$$\text{or } \cos(\alpha) = \frac{OH}{OB}$$

$$\text{Dnc } OH = OB \times \cos(\alpha)$$

$$\vec{OH} \begin{pmatrix} OB \times \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(\alpha)$$

BILAN : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(\alpha)$



$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})}$$

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\vec{AB}; \vec{AC})}$$